PROCEEDINGS OF IAM, V.8, N.1, 2019, pp.35-42

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО ДВУХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Н.А. Алиев[1], Т.С.Мамиева[1]

Бакинский Государственный Университет, ул. Х.Захида 23, AZ 1148, Баку
E-mail: nihanaliev.info@gmail.com
E-mail: turkanmemiyeva@yahoo.com

Резюме. Излагаемая работа посвящено к исследованию решений как задача Коши так и граничной задачи для нелинейного разностного двухмерного уравнения второго порядка с дискретным мультипликативными производными. Исходя из дискретного мультипликативного интеграла, определяется общая решения для рассматриваемого уравнения, а постоянные входящиеся в общей решений определяется из заданных условий.
.

Ключевые слова: Дискретный мультипликативный производный, дискретный мультипликативный интеграл, задача Коши, граничная задача.

AMS Subject Classification: 39A20.
.

1. Введение.

Рассматривается нелинейная задача для двухмерного разностного уравнения второго порядка с дискретными мультипликативными производными. Отметим, что аддитивному случаю посвящены многочисленная работа из которых отметим следующие [1]-[5]. В непрерывном случае мультипликативный интеграл, производной и их которые основные свойства введено в работе [6]. В дискретном случае задачи для уравнений как для аддитиво-мультипликативного производной так и для мультипликативо-аддитивных производной исследованы в [7]. Ранее некоторые одномерные задачи исследованы в работе [8]- [9]. Излагаемая работа посвящено к двухмерному уравнению второго порядка с дискретным мультипликативным производной в первой четверти вещественной плоскости.

Постановка задачи. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ -множество натуральных чисел,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

множество целых чисел.

Определение 1. Последовательность это есть функция определенное в множество $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$.

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 09.10.2018

Определение 2. Дискретное аддитивное производное имеет вид:

$$y_i^{(1)} = y_{i+1} - y_i. \tag{1}$$

Определение 3. Дискретное мультипликативное производное имеет вид:

$$y_i^{[1]} = \frac{y_{i+1}}{y_i}. \tag{2}$$

Рассмотрим следующий дискретное уравнение

$$D_2^{[1]} D_1^{[1]} u_{ij} = f_{ij}, \qquad i \geq 0, j \geq 0, \tag{3}$$

где $D_1^{[1]}$ -дискретное мультипликативное производное по первому индексу, а $D_2^{[1]}$ -дискретное мультипликативное производное по второму индексу.

Решения разностного уравнения. Принимая обозначения

$$D_1^{[1]} u_{ij} = v_{ij}, \qquad i \geq 0, j \geq 0, \tag{4}$$

из (3) получим

$$D_2^{[1]} v_{ij} = f_{ij}, \qquad i \geq 0, j \geq 0, \tag{5}$$

Учитывая (2) уравнения (5) представляем в виде:

$$\frac{v_{ij+1}}{v_{ij}} = f_{ij},$$

или

$$v_{ij+1} = f_{ij} v_{ij}. \tag{6}$$

Давая индексу j значение от нуля до ($j - 1$) и преумножая полученные выражении имеем:

$$v_{ij} = v_{i0} \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}, \qquad j \geq 1 \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4) и учитывая (2) имеем:

$$\frac{u_{i+1j}}{u_{ij}} = v_{i0} \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik},$$

или

$$u_{i+1j} = u_{ij} v_{i0} \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}, \qquad i \geq 0, j \geq 1. \tag{8}$$

Подобно к тому как (7) получено из (6), точно так же из (8) находим:

$$u_{ij} = u_{0j} \prod_{s=0}^{i-1} v_{s0} \prod_{k=0}^{j-1} f_{sk}, \qquad i \geq 1, j \geq 1. \tag{9}$$

Из (4) при $i = s$ и $j = 0$ исходя из (2) имеем:

$$v_{s0} = \frac{u_{s+10}}{u_{s0}},$$

или же

$$u_{ij} = u_{0j} \prod_{s=0}^{i-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{j-1} f_{sk}, \qquad i \geq 1, j \geq 1. \qquad (10)$$

С этим установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $u_{s0} \neq 0$, *при* $s \geq 0$, *а* f_{ij} *-заданные вещественные числы, то тогда общее решения уравнения (3) представимо в виде (10), где* u_{s0} *и* u_{0j} *произвольные постоянные числа.*

Замечание 1. Произвольные постоянные u_{s0} *и* u_{0j} определяется из заданных условий (начальных или граничных).

Задача Коши: К уравнении (3) присоединим следующие условии:

$$u_{0j} = \varphi_j, j \geq 0, \qquad u_{i0} = \psi_i, i \geq 0. \qquad (11)$$

Тогда решения задачи Коши (3), (11) имеет вид:

$$u_{ij} = \varphi_j \prod_{s=0}^{i-1} \frac{\psi_{s+1}}{\psi_s} \prod_{k=0}^{j-1} f_{sk}. \qquad (12)$$

Теорема 2. *При условиях* $\psi_s \neq 0, s \neq 0$, *если* $\varphi_j \;\; j \geq 0 \;\; \psi_i \;\; i \geq 0$ *и* f_{ij} *является заданные вещественные числа, то тогда существует единственное решения задачи Коши (3), (11) имеющий вид (12).*

Замечание 2. Легко видеть, что нелинейное разностное уравнения (3) имеет вид

$$u_{ij} u_{i+1j+1} = f_{ij} u_{ij+1} u_{i+1j}, \qquad i \geq 0, j \geq 0 \qquad (13)$$

Граничная задача. Предполагая, что уравнения (3) или (13) задано при

$$0 \leq i \leq n-1, \qquad 0 \leq j \leq m-1,$$

присоединим к этим уравнениям следующие граничные условия:

$$\begin{cases} \alpha_1 u_{0j} + \beta_1 u_{nj} = \varphi_i, & j = \overline{0,m}, \\ \alpha_2 u_{i0} + \beta_2 u_{im} = \psi_i, & i = \overline{0,n}, \end{cases} \qquad (14)$$

где $\alpha_k, \beta_k, k = 1,2;\ \varphi_j, j = \overline{0,m}, \psi_i, i = \overline{0,n}$ заданные вещественные постоянные числа. Учитывая (10) в заданном граничной условии (14), имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1 u_{0j} + \beta_1 u_{0j} \prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{j-1} f_{sk} = \varphi_j, & j = \overline{0,m}, \\ \alpha_2 u_{00} \prod_{s=0}^{i-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} + \beta_2 u_{0m} \prod_{s=0}^{i-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} = \psi_i, & i = \overline{0,n}, \end{cases} \qquad (15)$$

Из первого уравнения системы (15) находим:

$$u_{0j} = \frac{\varphi_j}{\alpha_1 + \beta_1 \prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{j-1} f_{sk}}, \qquad j = \overline{0,m} \tag{16}$$

если

$$\alpha_1 + \beta_1 \prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{j-1} f_{sk} \neq 0. \tag{17}$$

Подставляя (16) во второе уравнение системы (15) получим:

$$\alpha_2 \frac{\varphi_0}{\alpha_1 + \beta_1 \prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}}} \prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} + \beta_2 \frac{s_m}{\alpha_1 + \beta_1 \prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk}} \times$$

$$\times \prod_{s=0}^{i-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} = \psi_i, \qquad i = \overline{0,n} \tag{18}$$

Учитывая, что

$$\prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} = \frac{u_{n0}}{u_{00}},$$

а

$$\prod_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} = \frac{u_{n0}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk},$$

то из (18) получим:

$$\frac{\alpha_2 \varphi_0}{\alpha_1 + \beta_1 \frac{u_{n0}}{u_{00}}} \frac{u_{i0}}{u_{00}} + \frac{\beta_2 \varphi_m}{\alpha_1 + \beta_1 \frac{u_{n0}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk}} \frac{u_{i0}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{i-1} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} = \psi_i,$$

$$i = \overline{0,n},$$

или

$$\frac{u_{i0}}{u_{00}} \left[\frac{\alpha_2 s_0}{\alpha_1 + \beta_1 \frac{u_{n0}}{u_{00}}} + \frac{\beta_2 s_m}{\alpha_1 + \beta_1 \frac{u_{n0}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk}} \prod_{s=0}^{i-1} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} \right] = \psi_i,$$

$$i = \overline{0,n}. \quad (19)$$

Далее из (19) при $i = n$ имеем:

$$\frac{u_{n0}}{u_{00}} \left[\frac{\alpha_2 \varphi_0}{\alpha_1 + \beta_1 \frac{u_{n0}}{u_{00}}} + \frac{\beta_2 \varphi_m}{\alpha_1 + \beta_1 \frac{u_{n0}}{u_{00}} \prod_{s_1=0}^{n-1} \prod_{k_1=0}^{m-1} f_{s_1 k_1}} \prod_{s=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} \right]$$

$$= \psi_n \qquad (20)$$

из которого определяется $\frac{u_{n0}}{u_{00}}$, т.е. из (20) получается следующая квадратная уравнения:

$$A\left(\frac{u_{n0}}{u_{00}}\right)^2 + B\frac{u_{n0}}{u_{00}} + C = 0, \tag{21}$$

где

$$A = \alpha_2\varphi_0\beta_1\prod_{s_1=0}^{n-1}\prod_{k_1=0}^{m-1} f_{s_1k_1} + \beta_1\beta_2\varphi_m\prod_{s=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} - \psi_n\beta_1^2\prod_{s_1=0}^{n-1}\prod_{k_1=0}^{m-1} f_{s_1k_1} =$$

$$= \beta_1(\alpha_2\varphi_0 + \beta_2\varphi_m - \beta_1\psi_n)\prod_{s=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{m-1} f_{sk}, \tag{22}$$

$$B = \alpha_1\alpha_2\varphi_0 + \alpha_1\beta_2\varphi_m - \alpha_1\psi_n\beta_1\prod_{s=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{m-1} f_{sk} - \alpha_1\beta_1\psi_m =$$

$$= \alpha_1\left(\alpha_2\varphi_0 + \beta_2\varphi_m - \beta_1\psi_n - \beta_1\psi_n\prod_{s=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{m-1} f_{sk}\right), \tag{23}$$

$$C = -\alpha_1^2\psi_n. \tag{24}$$

Возьмем один из корней (21), т.е.

$$\frac{u_{n0}}{u_{00}} = -\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{25}$$

Подставляя (25) в (19) определяем $\frac{u_{i0}}{u_{00}}$ при $i = \overline{0, n-1}$ в виде

$$\frac{u_{i0}}{u_{00}} = \frac{\psi_i}{\dfrac{\alpha_2\varphi_0}{\alpha_1 + \beta_1\dfrac{u_{n0}}{u_{00}}} + \dfrac{\beta_2\varphi_m}{\alpha_1 + \beta_1\dfrac{u_{n0}}{u_{00}}\prod_{s_2=0}^{n-1}\prod_{k_2=0}^{m-1} f_{s_2k_2}}},$$

$$i = \overline{0, n-1}. \tag{26}$$

Наконец учитывая (25) и (26) в (16) определяем u_{0j}, далее учитывая (16), (25) и (26) в (10) определяем решение граничной задачи (3), (14). С этим установлено следующее утверждение.

Теорема 3. *Если при условиях теорема 1,* φ_j *при* $j = \overline{0, m}$, *и* ψ_i *при* $i = \overline{0, n}, \alpha_k, \beta_k, k = \overline{1,2}$*; заданные вещественные числа* $u_{00} \neq 0$ *и существует (25) и (26), то тогда граничная задача (3), (14) имеет решение задаваемой формулой (10).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев.А., Фатеми М.Р., 2014, О дискретной производной интегралах Новости Бакинского Государственного Университета, Серия физико-математических наук, Баку, Азербайджан, № 3, с. 45-49.

2. Гельфонд А.О., М., 1967, Наука, Конечно-разностное исчисление, 375с.
3. Самара А.А., Гулин А.В., М., 1989, Численные методы «Наука», 430 стр.
4. Алиев Н.А., Т.С. Мемиева, 2016, Задачи для уравнений с аддитивными мультипликативными дискретными производными третьего порядка Труды функционального анализа и его приложения. Конференция, посвященная 100-летию профессора Амира Хабибзаде, Баку, Азербайджан, с. 17-18.
5. Петровский И.Г., М., 1967, Лекции по уравнениям в частных производных, GIFML, 400 с.
6. Вазов В., Форсей Дж., М., 1963, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, IIL, 487 с.
7. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натомсон Г.Н., Риз В.М., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М., М., 1964, Линейные уравнения математической функции "Наука", 368 с.
8. Гантмахер Ф.Р., М., 1967, Теория матриц "Наука", 375 с.
9. Хассани О.Л., Алиев Н., 2008, Аналитический подход к решению конкретных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, Международный математический форум, Журнал для теории и приложений, 33-36, вып. 3, с. 1623-1631.

RESEARCH OF SOLUTION OF PROBLEMS FOR NONLINEAR DIFFERENCE TWO-DIFFERENT SECOND-ORDER EQUATION

N.A. Aliyev[1], T.S. Mamieva[1]

[1]Baku State University, Baku
E-mail: nihanaliev.info@gmail.com, turkanmemiyeva@yahoo.com

ABSTRACT

The paper is devoted to the research of solutions of the Cauchy and boundary value problem for a second-order nonlinear two-dimensional difference equation with discrete multiplicative derivatives. Based on the discrete multiplicative integral, the general solution for the considered equation is determined, and the constants including to the general solution are determined from the given conditions.

Keywords: Discrete multiplicative derivative, discrete multiplicative integral, Cauchy problem, boundary value problem.

References

1. Aliev.A., Fatemi M.R., 2014, O diskretnoy proizvodnoy i integralakh Novosti Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Seriya fiziko-matematicheskikh nauk, Baku, Azerbaydzhan, № 3, s. 45-49.(Aliyev A., Fatemi M.R., 2014, On discrete derivative and integrals (English) News of the Baku State University, Physics and Mathematics Series, Baku, Azerbaijan, No 3, pp. 45-49.) (in Russian)
2. Gel'fond A.O., M., 1967, Nauka, Konechno-raznostnoe ischislenie, 375 s. (Gelfond A.O., Moscow, 1967, Nauka, Finite Difference Calculus, 375 p) (in Russian)
3. Samara A.A., Gulin A.V., M., 1989, Chislennye metody «Nauka», 430 str.(Samara A.A., Gulin A.V., Moscow, 1989, Numerical Methods “Science”, 430 pages) (in Russian)
4. Aliev N.A., Memieva T.S., 2016, Zadachi dlya uravneniy s additivnymi mul'tiplikativnymi diskretnymi proizvodnymi tret'ego poryadka Trudy funktsional'nogo analiza i ego prilozheniya. Konferentsiya, posvyashchennaya 100-letiyu professora Amira Khabibzade, Baku, Azerbaydzhan, s. 17-18.(Aliyev N.A., Memiyeva T.S., 2016, Problems for the equations with third-order additive multiplicative discrete derivatives (English) Proceedings of the Functional Analysis And its Applications Conference devoted to the 100th anniversary of Prof. Amir Habibzadeh, Baku, Azerbaijan, pp. 17-18) (in Russian)
5. Petrovskiy I.G., M., 1967, Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh, GIFML, 400 s.(Petrovsky I.G., Moscow, 1967, Lectures on partial differential equations, GIFML, 400 pp.) (in Russian)
6. Vazov V., Forsey Dzh., M., 1963, Raznostnye metody resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh, IIL, 487 s .(Vazov V., Forsay J., Moscow, 1963, Difference Methods for Solving Differential Equations in Partial Derivatives, IIL, 487 p.) (in Russian)
7. Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G., Natomson G.N., Riz V.M., Slobodetskiy L.N., Smirnov M.M., M., 1964, Lineynye uravneniya matematicheskoy funktsii "Nauka", 368 s.(Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G., Natomson G.N., Reese V.M., Slobodetsky L.N., Smirnov MM, Moscow, 1964, Linear equations of the mathematical function "Science", 368 p.) (in Russian)
8. Gantmakher F.R., M., 1967, Teoriya matrits "Nauka", 375 s.(Gantmakher

F.R., Moscow, 1967, Theory of Matrices "Science", 375 pages)(in Russian)

9. Khassani O.L., Aliev N.A., 2008, Analiticheskiy podkhod k resheniyu konkretnykh lineynykh i nelineynykh differentsial'nykh uravneniy, Mezhdunarodnyy matematicheskiy forum, Zhurnal dlya teorii i prilozheniy, 33-36, vyp. 3, s. 1623-1631**.(** Hassani O.L., Aliev N.A., 2008, Analytic Approach to Solve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations, International Mathematical Forum Journal for Theory and Applications, 33-36, vol. 3, pp. 1623-1631.) (in Russian)